Title	Smooth 2-knots in S$^2 \times$ S^2
Author(s)	佐藤, 好久
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 636: 131-140
Issue Date	1987-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/100119
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
636巻 1987年 131-140

Smooth 2-knots in $S^2 \times S^2$

九州大・理 佐藤 好久
(Yoshihisa Sato)

§1. Introduction

S^4, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$ は最も基本的な 1-connected, closed, oriented 4-manifolds であり、そして余次元2の manifold(例えば、球面)の埋め込み問題は重要な研究対象であると思われる。S^4 の中への S^2 の埋め込みの理論は通常の結び目理論であり、また、$\mathbb{C}P^2$ の中への自己交点数1の S^2 の locally flat な埋め込みは、位相的には、$(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$ であることが知られている。本稿では、$S^2 \times S^2$ の場合について考え、null-homotopic でない一般 knot について考察することにする。

$\xi \in H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z})$ を実現する $S^2 \times S^2$ の中へなめらかに埋め込まれた2-sphere S に対して、S 又は空間対 $(S^2 \times S^2, S)$ を、ξ を実現する $S^2 \times S^2$ 内の(smooth) 2-knot と呼ぶことにする。この時、Kuga によって次が証明された。

<u>Theorem 1.1. (1984 [5])</u> $\quad \zeta = [S^2 \times *]$, $\eta = [* \times S^2]$

を、$H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ の生成元とし、S を $p\xi+q\eta$ $(p,q\in\mathbb{Z})$ を実現する $S^2\times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、$|p|\leq 1$ 又は $|q|\leq 1$ である。 ▨

よって、長い間、問題になっていた $S^2\times S^2$ 内の 2-knots と2次元 homology classes との関係は、こうして完全に解決されたので、次の事が自然に問題となる。

<u>Problem</u>　$S^2\times S^2$ 内の 2-knot の homeomorphism type（又は diffeomorphism type）を分類せよ。

この問題を考えるにあたり、まず $S^2\times S^2$ 内の standard な 2-knots を用意する必要がある。即ち、$S^2\times S^2$ の cross-section は p 個の disjoint な fibres と transverse に1点ずつで交わるので、その交点のところで連結和をとることにより、$\xi+p\eta$ を実現する $S^2\times S^2$ 内の 2-knot Σ_p を得る。各 $p\geq 0$ に対して、この Σ_p を、$\xi+p\eta$ を実現する $S^2\times S^2$ 内の standard な 2-knot とする。

§2 で、位相的に Σ_p であるための必要十分条件を考え、§3 では、ξ を実現する $S^2\times S^2$ 内の non-standard な 2-knots を構成する。また、得られたのと同様の結果が、locally flat な埋め込みの場合にも成り立つことを注意しておく。

§ 2. Main Theorem

まず次のことに注意する。

<u>Proposition 2.1.</u>　S を $p\xi+q\eta$ を実現する $S^2\times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、

$$H_1(S^2\times S^2-S;\mathbb{Z})\cong\begin{cases}0 & \text{if}\quad |p|=1 \text{ or } |q|=1\\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{if } pq=0 \text{ and } m=|p|+|q|\neq 1\end{cases}$$

▨

従って、特に補空間の基本群が自明である 2-knot $(S^2\times S^2, S)$ は、$\pm p\xi\pm\eta$ or $\pm\xi\pm p\eta$ の型の元を実現する。

本編で紹介する結果は、次の弱い意味での unknotting 定理である。

<u>Theorem 2.1.</u>　S を $S^2\times S^2$ 内の 2-knot とする。この時、$\pi_1(S^2\times S^2-S)=1$ であるための必要十分条件は、ある非負整数 p に対して、pairwise homeomorphism

$$\varphi:(S^2\times S^2, S)\longrightarrow(S^2\times S^2, \Sigma_p)$$

が存在することである。　▨

また、この定理は次の様に言いかえることもできる。

<u>Corollary 2.1</u>　pを任意の非負整数とする。この時、その自己交点数が$\pm 2p$で、補空間の基本群が自明であるような$S^2\times S^2$内の 2-knot は、位相的に唯一つ存在する。　▨

$S^2\times S^2$内の 2-knot S は、次のように分解できる。$E(S)$をSの exterior, mをSの自己交点数とする。また、$D(m)$をEuler数mのS^2上D^2-bundleとし、$\nu: S^2 \longrightarrow D(m)$ を zero-section とする。この時、$(S^2\times S^2, S) = (E(S)\cup_\gamma D(m), \nu(S^2))$。ここに、$\gamma: L(m, m-1) \longrightarrow L(m, m-1)$ は、貼り合わせの diffeomorphism である。($L(0,-1) = S^2\times S^1$。) 故に、Isotopy 拡張定理により、$E(S)$をexteriorにもつ$S^2\times S^2$内の 2-knot は、γの isotopy class にのみ依存する。

$\pi_1(S^2\times S^2 - S) = 1$ と仮定する。Prop. 2.1. により、一般性を失うことなく、ある非負整数pに対してSは$\xi+p\eta$を実現するとしてよい。この時、$H_2(E(S);\mathbb{Z}) \cong H_2(E(S), \partial E(S);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$。そして、$E(S)$の intersection form $(H_2(E(S);\mathbb{Z}), \cdot)$が$(\mathbb{Z}, (2p))$であることが容易に確められる。ただし、$(2p): \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は、$(2p)(1,1) = 2p$ で定義される bilinear form である。故に$E(S)$は、lens space $L(2p, 2p-1)$を境界にもち、その intersection form が$(\mathbb{Z}, (2p))$である 1-connected compact 4-manifold である。[2] の結果をみると、一般にこのような 4-manifold

は、位相的に有限個存在する。特に、$p=0, 1$, 素数の時は、1個である。(この個数の値はpによってのみ定まる数である。) しかし、今の場合、exterior $E(S)$は$S^2 \times S^2$に埋め込まれた4-manifoldであり、このことから、$E(S)$はpに関する条件なしに、位相的に$D(2p)$であることがわかる。よって定理を証明するには、貼り合わせの写像γのisotopy classを調べればよい。lens spaceのdiffeotopy groupに関する[1], [3], [4]の結果により、このような状況下では、γは$D(2p)$へ拡張することができることがわかる。こうして定理は証明される。

また、この証明の方針からわかるように、$\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$なる条件のもとで、$E(S)$が$D(2p)$にdiffeomorphicであることが言えるならば、上の定理は、diffeomorphismに対して成立することになる。

Sを$S^2 \times S^2$内の2-knot, KをS^4内の2-knotとする。この時、この2つの2-knotの連結和は、$S^2 \times S^2$内のもう一つ別の2-knot $(S^2 \times S^2, S') = (S^2 \times S^2, S) \# (S^4, K)$ を与える。しかし、この連結和が常に新しい$S^2 \times S^2$内の2-knotを与えるとは限らない。実際、

<u>Corollary 2.2.</u> Sを$\pi_1(S^2 \times S^2 - S) = 1$である2-knotとする。この時、任意の$S^4$内の2-knot Kに対して、

$$(S^2\times S^2, S)\#(S^4, K) \underset{homeo.}{\approx} (S^2\times S^2, S)$$

(proof). $(S^2\times S^2, S') = (S^2\times S^2, S)\#(S^4, K)$とする。また、$E(S)$, $E(S')$, $E(K)$を各々S, S', Kのexteriorsとする。この時、$E(S') \cong E(S)\cup_T E(K)$。ただし、$T=\partial E(S)\cap\partial E(K)$はmeridinal solid torusである。$\pi_1(E(S))=1$、であり、$\pi_1(E(K))$はweight 1なので、van Kampenの定理により$\pi_1(E(S'))=1$.
よって定理により結果がわかる。 ▨

<u>Remark 2.1</u> $\mathcal{K}_2$をS^4内の2-knotsの全体とする。
$I(S^2\times S^2, S) = \{(S^4, K)\in\mathcal{K}_2 \mid (S^2\times S^2, S)\#(S^4, K) \underset{diffeo.}{\cong} (S^2\times S^2, S)\}$,
$I'(S^2\times S^2, S) = \{(S^4, K)\in\mathcal{K}_2 \mid (S^2\times S^2, S)\#(S^4, K) \underset{homeo.}{\approx} (S^2\times S^2, S)\}$.
とおく。この時、[7]の中のLemma 6.27により、次の条件(*)をみたす$S^2\times S^2$内の2-knot Sに対して、$I(S^2\times S^2, S)=\mathcal{K}_2$.
である。: (*) 自己交点数0の$S^2\times S^2$内の2-knotS'が存在してSはS'と1点でtransverseに交わる。
しかし、この条件(*)をみたす2-knot Sは、$\pi_1(S^2\times S^2 - S)=1$である。そこで条件(*)を除いた場合について考えると、上の系により、$\pi_1(S^2\times S^2 - S)=1$をみたす$S^2\times S^2$内の2-knot Sに対して$I'(S^2\times S^2, S)=\mathcal{K}_2$である。 ▨

§3. Examples of 2-knots in $S^2\times S^2$

$S^2\times S^2$内の2-knotの構成を[7]と同様の方法でする。即ち、KをS^4内の2-knotとし、CをS^4内になめらかに埋め込まれたcircleとする。ただし、Cは2-knot Kと交わらないとする。この時、CはS^4内にstandardlyに埋め込まれているとしてよく、Cのexteriorは、$S^2\times D^2$である。Kはこの$S^2\times D^2$に含まれているので、この2-knot Kでもって、$S^2\times S^2=S^2\times D^2\cup_\partial S^2\times D^2$内の2-knot Sを与えることにする。van Kampenの定理から、$\pi_1(S^2\times S^2-S)$は$\pi_1(S^4-K)/H$に同型である。ただし、Hは$[C]\in\pi_1(S^4-K)$で生成されたnormal closureである。

<u>Proposition 3.1.</u> CがS^4-Kにて、Kのmeridianにhomologousであるならば、KとCから構成された$S^2\times S^2$内の2-knot Sはςを実現する。 ▨

<u>Remark 3.1.</u> 一般に、CがS^4-Kにて(Kのmeridian)^{p}にhomologousであるならば、Sは$p\varsigma$を実現する。 ▨

<u>Example 3.1.</u> Kをtrefoil knotの5-twist spun 2-knotとする。この時、$\pi_1(S^4-K)\cong\mathbb{Z}\times\mathcal{D}$. ただし、$\mathcal{D}=\langle a,b\,;\,a^3=b^5=(ab)^2\rangle$ (the binary dodecahedral group).

$\mathbb{Z}$はKのmeridianにhomologousな元μで生成される無限巡回群である。今、circle Cを$\mu \in \pi_1(S^4-K)$を実現するものとし、Hをμで生成されるnormal closureとする。これらKとCから構成された$S^2 \times S^2$内の2-knot Sはςを実現し、$\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \pi_1(S^4-K)/H \cong \mathcal{D}$. である。 ▨

<u>Example 3.2.</u> KをS^3内のknotとし、mとlをKのmeridianとlongitudeとする。この時、K上$\frac{1}{n}$-surgeryして、得られる3-manifold $M(K;\frac{1}{n})$は、homology 3-sphereで、$\pi_1(M(K;\frac{1}{n})) \cong \pi_1(S^3-K)/H$（ただし、Hは$ml^n \in \pi_1(S^3-K)$で生成されるnormal closure.）である。今、LをKのspun 2-knotとすると、$\pi_1(S^4-L) \cong \pi_1(S^3-K)$である。$\bar{m}, \bar{l} \in \pi_1(S^4-L)$をそれぞれ、この同型により$m, l \in \pi_1(S^3-K)$に対応するものとする。$S^4-L$内のcircle Cを$\bar{m}\bar{l}^n \in \pi_1(S^4-L)$を実現するものとすると、これらLとCから構成される$S^2 \times S^2$内の2-knot Sは、ςを実現し、$\pi_1(S^2 \times S^2 - S) \cong \pi_1(S^4-L)/H' \cong \pi_1(S^3-K)/H \cong \pi_1(M(K;\frac{1}{n}))$である. ▨

従って、このExampleから次がわかる。

<u>Proposition 3.2.</u> Dehn surgeryで得られるすべてのhomology 3-sphere Mに対して、ςを実現し、そのknot groupが$\pi_1(M)$に同型であるような$S^2 \times S^2$内の2-knotが存在する。 ▨

更に、このPropositionは次のことも意味している。

<u>Proposition 3.3.</u> Dehn surgeryで得られるすべてのhomology 3-sphere Mに対して、その基本群が$\pi_1(M)$に同型であるようなhomology 4-sphereが存在する。 ▨

<u>Remark 3.2.</u> $\mathcal{D}$のcenterは$c=a^3$で生成される。そこでcircle $C \subset S^4-K$（KはExample 3.1の2-knot）として$\mu c^{-1} \in \pi_1(S^4-K)$を実現するものをとると、この場合も、$K$と$C$から構成される2-knot Sは、ζを実現し、$\pi_1(S^2\times S^2-S)\cong\mathcal{D}$.

また、Example 4.2において、Kとしてtrefoil knotをとり、Cとして、$\bar{m}\bar{\ell}\in\pi_1(S^4-L)$を実現するものをとると、これらから構成される2-knot Sもζを実現し、$\pi_1(S^2\times S^2-S)\cong\pi_1(\Sigma(2,3,5))\cong\mathcal{D}$である。

これら3つの$S^2\times S^2$内の2-knotsは、違う材料（S^4内の2-knotsとcircles）から構成されたものであるが、このようにどれもζを実現し、その補空間の基本群が$\mathcal{D}$に同型である。これらは、同じ2-knotなのであろうか、それとも違うのであろうか？ ▨

References

[1] F. Bonahon : Difféotopies des espaces lenticulaires, Topology 22 (1983), 305-314.

[2] S. Boyer : Simply-connected 4-manifolds with a given boundary, Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), 331-357.

[3] H. Gluck : The embedding of two-spheres in the four-sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308-333.

[4] C.D. Hodgson : Involutions and isotopies of lens spaces, Master Thesis, Univ. of Melbourne (1981).

[5] K. Kuga : Representing homology classes of $S^2 \times S^2$, Topology 23 (1984), 133-137.

[6] Y. W. Lee : Contractibly embedded 2-spheres in $S^2 \times S^2$, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 280-282.

[7] R. Mandelbaum : Four-dimensional topology : an introduction, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 1-159.